Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Rezolvarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale

Outline

Problema Cauchy

- Ecuaţia diferenţială de ordinul I:

$$x' = f(t, x,) \tag{1}$$

unde $x' = \frac{dx}{dt}$. Soluţia generală: $x = x(t, C),\ C \in \mathbb{R}$

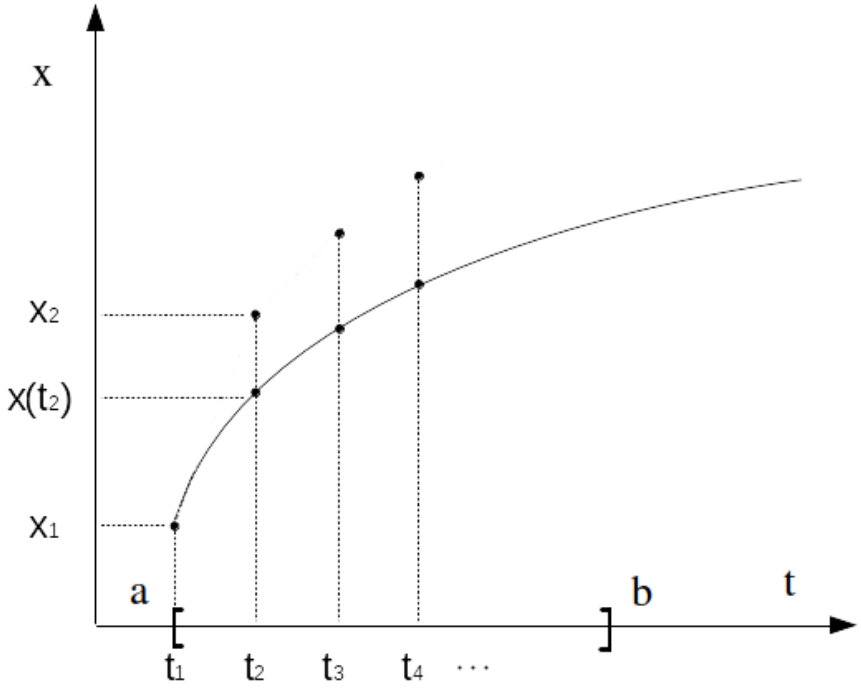
- Problema Cauchy:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases} \tag{2}$$

Soluţia particulară: $x = x(t)$

Soluţie numerică a unei probleme Cauchy

- **Soluţia numerică (aproximativă)** a unei probleme Cauchy - un şir de puncte care urmează graficul soluţiei exacte.



- Diviziunea: $\Delta : a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} = b$.
  Soluţia numerică: şirul de valori $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$, unde $x(t_i) \simeq x_i$.
- x_1 este dată de condiţia iniţială iar $x_2, ..., x_{n+1}$ se pot calcula folosind o formulă iterativă de tipul $x_{i+1} = F(t_i, x_i)$.

Metoda lui Euler - deducerea formulei

- $\Delta : a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} = b$ - diviziune **echidistantă**: $t_{i+1} - t_i = h$, unde $h = \frac{b-a}{n}$ este **pasul diviziunii**.

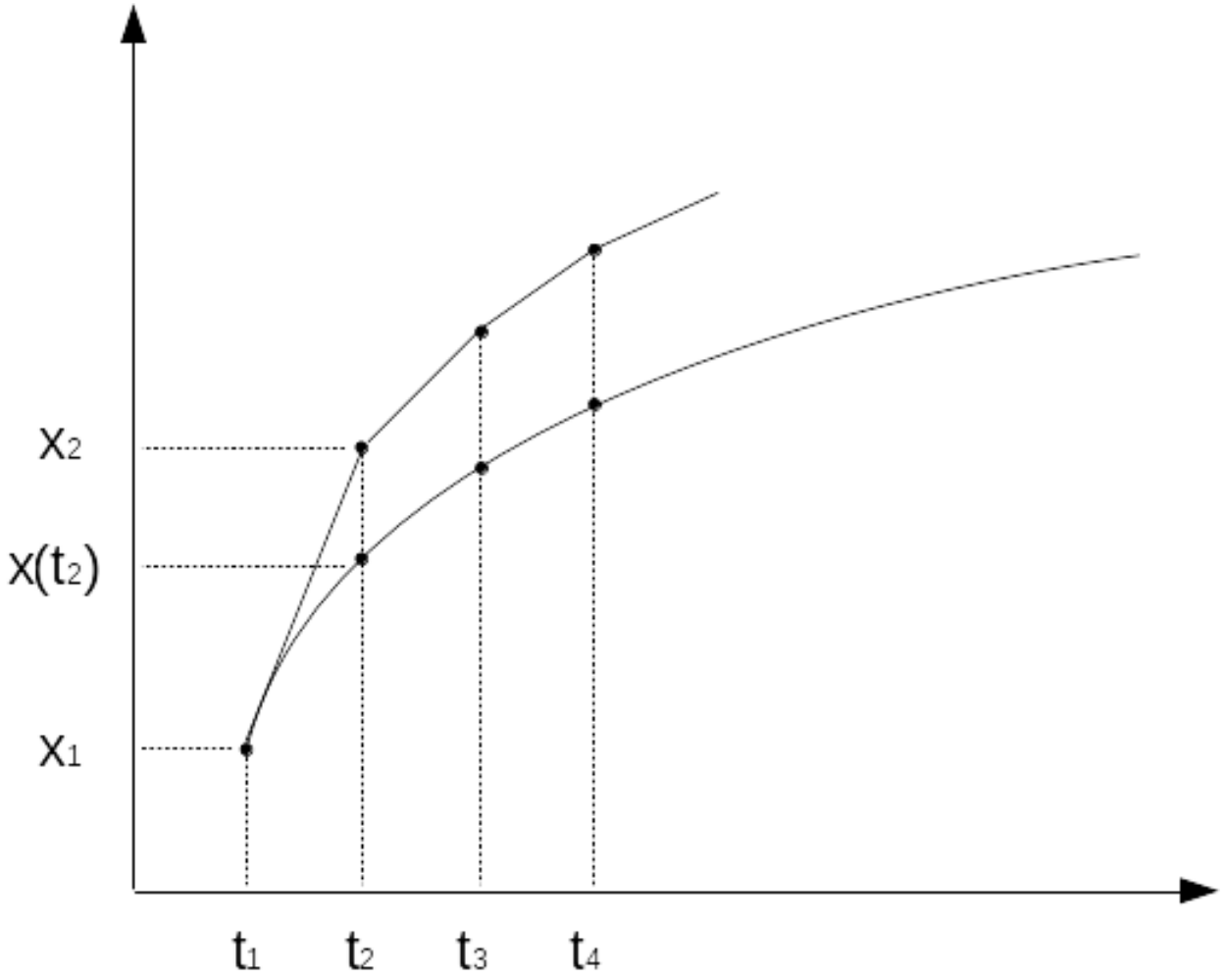
- Dezvoltăm $x(t_{i+1})$ în serie Taylor şi păstrăm doar primii doi termeni ai dezvoltării (un polinom Taylor de gradul întâi):

$$x(t_{i+1}) = x(t_i + h) \simeq x(t_i) + \frac{x'(t_i) \cdot h^1}{1!} = x(t_i) + f(t_i, x_i) \cdot h$$

- Notăm prin x_k valoarea aproximativă a soluţiei $x(t_k)$. Se obţine relaţia de recurenţă:

$$x_{i+1} = x_i + h \cdot f(t_i, x_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

Metoda lui Euler - interpretare geometrică



Metoda lui Euler - algoritm

Date de intrare: Punctul de pornire (t_1, x_1) (dat de condiţia iniţială), intervalul de integrare $[a, b]$ (unde $a = t_1$), numărul de subintervale n.

Date de ieşire: Valorile aproximative $x_i,\ i = 2, 3, \cdots, n+1$ ale funcţiei necunoscute x în nodurile corespunzătoare t_i ale diviziunii.

Start
$h = (b - a)/n;$
Pentru i de la 1 *la n*
    $t_{i+1} = t_i + h$
    $x_{i+1} = x_i + h \cdot f(t_i, x_i)$
Stop

Exemplu - Soluţia analitică

Fie problema Cauchy $\begin{cases} x' = -2 \cdot t \cdot x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$. *Găsiţi soluţia analitică, calculaţi o soluţie numerică pe intervalul* $[0, 1]$ *folosind metoda lui Euler şi comparaţi cele două soluţii.*

Soluţia analitică (exactă):

- Separăm variabilele: $\frac{dx}{dt} = -2 \cdot t \cdot x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \cdot dx = -2 \cdot t \cdot dt$
  $\Rightarrow \int \frac{1}{x^2} \cdot dx = \int -2 \cdot t \cdot dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = -t^2 - C \Rightarrow \frac{1}{x} = t^2 + C \Rightarrow x = \frac{1}{t^2+C}$
- Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este $x(t) = \frac{1}{t^2+C}$, $C \in \mathbb{R}$.
- Calculăm C folosind condiţia iniţială: $x(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{0^2+C} = 1 \Rightarrow \frac{1}{C} = 1 \Rightarrow C = 1$.
- Soluţia particulară a problemei Cauchy este $x(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

Exemplu - Soluţia analitică

Fie problema Cauchy $\begin{cases} x' = -2 \cdot t \cdot x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$. *Găsiţi soluţia analitică, calculaţi o soluţie numerică pe intervalul* $[0, 1]$ *folosind metoda lui Euler şi comparaţi cele două soluţii.*

Soluţia analitică (exactă):

- Separăm variabilele: $\frac{dx}{dt} = -2 \cdot t \cdot x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \cdot dx = -2 \cdot t \cdot dt$
  $\Rightarrow \int \frac{1}{x^2} \cdot dx = \int -2 \cdot t \cdot dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = -t^2 - C \Rightarrow \frac{1}{x} = t^2 + C \Rightarrow x = \frac{1}{t^2+C}$
- Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este $x(t) = \frac{1}{t^2+C}$, $C \in \mathbb{R}$.
- Calculăm C folosind condiţia iniţială: $x(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{0^2+C} = 1 \Rightarrow \frac{1}{C} = 1 \Rightarrow C = 1$.
- Soluţia particulară a problemei Cauchy este $x(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

Exemplu - Soluţia analitică

Fie problema Cauchy $\begin{cases} x' = -2 \cdot t \cdot x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$. *Găsiţi soluţia analitică, calculaţi o soluţie numerică pe intervalul* $[0, 1]$ *folosind metoda lui Euler şi comparaţi cele două soluţii.*

Soluţia analitică (exactă):

- Separăm variabilele: $\frac{dx}{dt} = -2 \cdot t \cdot x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \cdot dx = -2 \cdot t \cdot dt$
  $\Rightarrow \int \frac{1}{x^2} \cdot dx = \int -2 \cdot t \cdot dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = -t^2 - C \Rightarrow \frac{1}{x} = t^2 + C \Rightarrow x = \frac{1}{t^2+C}$
- Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este $x(t) = \frac{1}{t^2+C}$, $C \in \mathbb{R}$.
- Calculăm C folosind condiţia iniţială: $x(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{0^2+C} = 1 \Rightarrow \frac{1}{C} = 1 \Rightarrow C = 1$.
- Soluţia particulară a problemei Cauchy este $x(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

Exemplu - Soluţia analitică

Fie problema Cauchy $\begin{cases} x' = -2 \cdot t \cdot x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$. *Găsiţi soluţia analitică, calculaţi o soluţie numerică pe intervalul* $[0, 1]$ *folosind metoda lui Euler şi comparaţi cele două soluţii.*

Soluţia analitică (exactă):

- Separăm variabilele: $\frac{dx}{dt} = -2 \cdot t \cdot x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \cdot dx = -2 \cdot t \cdot dt$
  $\Rightarrow \int \frac{1}{x^2} \cdot dx = \int -2 \cdot t \cdot dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = -t^2 - C \Rightarrow \frac{1}{x} = t^2 + C \Rightarrow x = \frac{1}{t^2+C}$
- Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este $x(t) = \frac{1}{t^2+C}$, $C \in \mathbb{R}$.
- Calculăm C folosind condiţia iniţială: $x(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{0^2+C} = 1 \Rightarrow \frac{1}{C} = 1 \Rightarrow C = 1$.
- Soluţia particulară a problemei Cauchy este $x(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

Exemplu - Soluţia numerică

Fie problema Cauchy $\begin{cases} x' = -2 \cdot t \cdot x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$. *Găsiţi soluţia analitică, calculaţi o soluţie numerică pe intervalul* $[0, 1]$ *folosind metoda lui Euler şi comparaţi cele două soluţii.*

Soluţia numerică (aproximativă):

- Alegem diviziunea echidistantă (cu pasul $h = 0.1$):

$$\Delta : t_1 = 0 < t_2 = 0.1 < t_3 = 0.2 < ... < t_{11} = 1$$

Avem $f(t, x) = -2 \cdot t \cdot x^2$ şi deci formula lui Euler $x_{i+1} = x_i + h \cdot f(t_i, x_i)$ devine:

$$x_{i+1} = x_i - 0.2 \cdot t_i \cdot x_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, 10$$

- Din condiţia iniţială ($x(t_1) = x_1$) rezultă $x_1 = 1$ şi deci pentru $i = 1$ calculăm $x_2 = x_1 - 0.2 \cdot t_1 \cdot x_1^2 = 1 - 0.2 \cdot 0 \cdot 1^2 = 1 - 0 = 1$.
- Pentru $i = 2$ calculăm $x_3 = x_2 - 0.2 \cdot t_2 \cdot x_2^2 = 1 - 0.2 \cdot 0.1 \cdot 1^2 = 1 - 0.02 = 0.98$.
- Pentru $i = 3$ calculăm $x_4 = x_3 - 0.2 \cdot t_3 \cdot x_3^2 = 0.98 - 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.98^2 = 1 - 0.02 = 0.98 - 0.04 \cdot 0.9604 = 0.98 - 0.038416 = 0.9416$ şi calculul poate continua în aceeaşi manieră ($i = 4, 5, \cdots, 10$).

Exemplu - Soluţia numerică

Fie problema Cauchy $\begin{cases} x' = -2 \cdot t \cdot x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$. *Găsiţi soluţia analitică, calculaţi o soluţie numerică pe intervalul* $[0, 1]$ *folosind metoda lui Euler şi comparaţi cele două soluţii.*

Soluţia numerică (aproximativă):

- Alegem diviziunea echidistantă (cu pasul $h = 0.1$):

$$\Delta : t_1 = 0 < t_2 = 0.1 < t_3 = 0.2 < ... < t_{11} = 1$$

  Avem $f(t, x) = -2 \cdot t \cdot x^2$ şi deci formula lui Euler $x_{i+1} = x_i + h \cdot f(t_i, x_i)$ devine:

$$x_{i+1} = x_i - 0.2 \cdot t_i \cdot x_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, 10$$

- Din condiţia iniţială ($x(t_1) = x_1$) rezultă $x_1 = 1$ şi deci pentru $i = 1$ calculăm $x_2 = x_1 - 0.2 \cdot t_1 \cdot x_1^2 = 1 - 0.2 \cdot 0 \cdot 1^2 = 1 - 0 = 1$.
- Pentru $i = 2$ calculăm $x_3 = x_2 - 0.2 \cdot t_2 \cdot x_2^2 = 1 - 0.2 \cdot 0.1 \cdot 1^2 = 1 - 0.02 = 0.98$.
- Pentru $i = 3$ calculăm $x_4 = x_3 - 0.2 \cdot t_3 \cdot x_3^2 = 0.98 - 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.98^2 = 1 - 0.02 = 0.98 - 0.04 \cdot 0.9604 = 0.98 - 0.038416 = 0.9416$ şi calculul poate continua în aceeaşi manieră ($i = 4, 5, \cdots, 10$).

Exemplu - Soluţia numerică

Fie problema Cauchy $\begin{cases} x' = -2 \cdot t \cdot x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$. *Găsiţi soluţia analitică, calculaţi o soluţie numerică pe intervalul* $[0, 1]$ *folosind metoda lui Euler şi comparaţi cele două soluţii.*

Soluţia numerică (aproximativă):

- Alegem diviziunea echidistantă (cu pasul $h = 0.1$):

$$\Delta : t_1 = 0 < t_2 = 0.1 < t_3 = 0.2 < ... < t_{11} = 1$$

  Avem $f(t, x) = -2 \cdot t \cdot x^2$ şi deci formula lui Euler $x_{i+1} = x_i + h \cdot f(t_i, x_i)$ devine:

$$x_{i+1} = x_i - 0.2 \cdot t_i \cdot x_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, 10$$

- Din condiţia iniţială ($x(t_1) = x_1$) rezultă $x_1 = 1$ şi deci pentru $i = 1$ calculăm $x_2 = x_1 - 0.2 \cdot t_1 \cdot x_1^2 = 1 - 0.2 \cdot 0 \cdot 1^2 = 1 - 0 = 1$.
- Pentru $i = 2$ calculăm $x_3 = x_2 - 0.2 \cdot t_2 \cdot x_2^2 = 1 - 0.2 \cdot 0.1 \cdot 1^2 = 1 - 0.02 = 0.98$.
- Pentru $i = 3$ calculăm $x_4 = x_3 - 0.2 \cdot t_3 \cdot x_3^2 = 0.98 - 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.98^2 = 1 - 0.02 = 0.98 - 0.04 \cdot 0.9604 = 0.98 - 0.038416 = 0.9416$ şi calculul poate continua în aceeaşi manieră ($i = 4, 5, \cdots, 10$).

Exemplu - Soluţia numerică

Fie problema Cauchy $\begin{cases} x' = -2 \cdot t \cdot x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$. *Găsiţi soluţia analitică, calculaţi o soluţie numerică pe intervalul* $[0, 1]$ *folosind metoda lui Euler şi comparaţi cele două soluţii.*

Soluţia numerică (aproximativă):

- Alegem diviziunea echidistantă (cu pasul $h = 0.1$):
$$\Delta : t_1 = 0 < t_2 = 0.1 < t_3 = 0.2 < ... < t_{11} = 1$$
Avem $f(t, x) = -2 \cdot t \cdot x^2$ şi deci formula lui Euler $x_{i+1} = x_i + h \cdot f(t_i, x_i)$ devine:
$$x_{i+1} = x_i - 0.2 \cdot t_i \cdot x_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, 10$$
- Din condiţia iniţială ($x(t_1) = x_1$) rezultă $x_1 = 1$ şi deci pentru $i = 1$ calculăm $x_2 = x_1 - 0.2 \cdot t_1 \cdot x_1^2 = 1 - 0.2 \cdot 0 \cdot 1^2 = 1 - 0 = 1$.
- Pentru $i = 2$ calculăm $x_3 = x_2 - 0.2 \cdot t_2 \cdot x_2^2 = 1 - 0.2 \cdot 0.1 \cdot 1^2 = 1 - 0.02 = 0.98$.
- Pentru $i = 3$ calculăm $x_4 = x_3 - 0.2 \cdot t_3 \cdot x_3^2 = 0.98 - 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.98^2 = 1 - 0.02 = 0.98 - 0.04 \cdot 0.9604 = 0.98 - 0.038416 = 0.9416$ şi calculul poate continua în aceeaşi manieră ($i = 4, 5, \cdots, 10$).

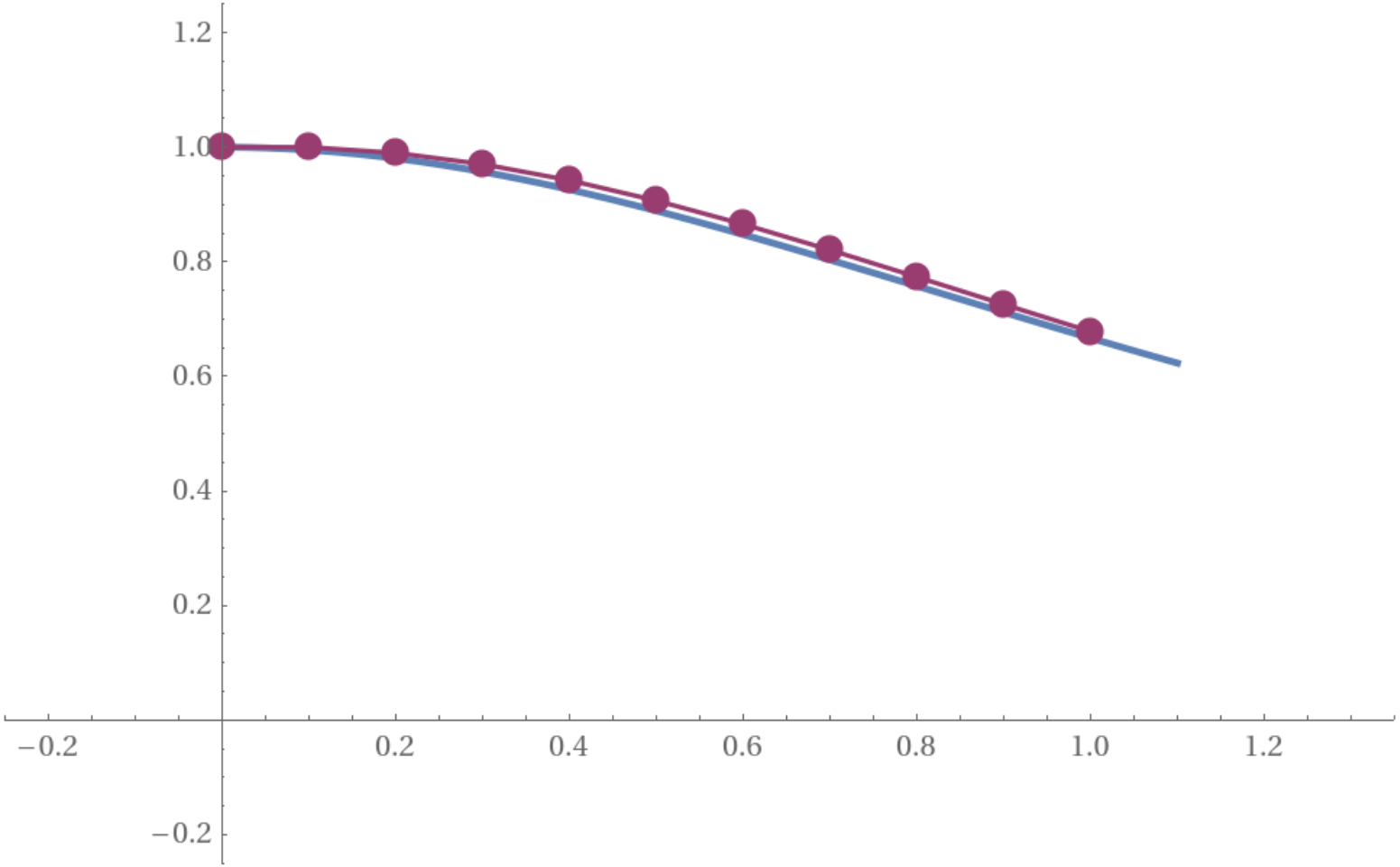
Exemplu - Comparaţia dintre soluţia numerică şi cea exactă

Comparaţia dintre soluţia numerică şi cea exactă:

- Diferenţa (în modul) dintre valoarea exactă $x(t_i)$ şi aproximarea corespunzătoare x_i reprezintă chiar eroarea asociată aproximarii: $\varepsilon_i = |x(t_i) - x_i|$.
- Soluţia exactă fiind $x(t) = \frac{1}{t^2+1}$, valorile exacte $x(t_i)$ corespunzătoare aproximarilor calculate mai sus sunt: $x(t_1) = \frac{1}{t_1^2+1} = \frac{1}{0^2+1} = 1$, $x(t_2) = \frac{1}{t_2^2+1} = \frac{1}{0.1^2+1} = \frac{1}{1.01} \simeq 0.99$, $x(t_3) = \frac{1}{t_3^2+1} = \frac{1}{0.2^2+1} = \frac{1}{1.04} \simeq 0.961$, $x(t_4) = \frac{1}{t_4^2+1} = \frac{1}{0.3^2+1} = \frac{1}{1.09} \simeq 0.917$.
- Rezultatele corespunzătoare primilor trei paşi ai metodei lui Euler:

t_i	Sol. exactă $x(t_i)$	Sol. numerică x_i	Eroarea $\varepsilon_i = \lvert x(t_i) - x_i \rvert$
$t_1 = 0$	$x(t_1) = 1$	$x_1 = 1$	$\varepsilon_1 = \lvert 1 - 1 \rvert = 0$
$t_2 = 0.1$	$x(t_2) \simeq 0.990...$	$x_2 = 1$	$\varepsilon_2 \simeq \lvert 0.99 - 1 \rvert \simeq 0.01$
$t_3 = 0.2$	$x(t_3) \simeq 0.961...$	$x_3 = 0.98$	$\varepsilon_3 \simeq \lvert 0.961 - 0.98 \rvert \simeq 0.02$
$t_4 = 0.3$	$x(t_4) \simeq 0.917...$	$x_4 \simeq 0.941...$	$\varepsilon_4 \simeq \lvert 0.917 - 0.941 \rvert \simeq 0.03$

Exemplu - Comparaţia dintre soluţia numerică şi cea exactă



Observaţii:

- În cadrul oricărei metode de tip Euler, care se bazează pe o trunchiere a dezvoltării în serie Taylor, valorile aproximaţiilor x_i prezintă erori inerente. În cazul metodei lui Euler propriu-zise, aceste erori sunt relativ mari şi, deşi ele pot fi micşorate prin alegerea unui pas mai mic, în general metoda lui Euler nu este considerată o metodă suficient de precisă.

- Metoda lui Euler este o metodă de tip *unistep*, adică x_{i+1} este calculat în funcţie doar de x_i, spre deosebire de metodele de tip *multistep*, în cadrul cărora x_{i+1} depinde nu doar de x_i ci şi de x_{i-1}, x_{i-2} ..., în acest mod obţinându-se o aproximare mai precisă.

Observaţii:

- În cadrul oricărei metode de tip Euler, care se bazează pe o trunchiere a dezvoltării în serie Taylor, valorile aproximaţiilor x_i prezintă erori inerente. În cazul metodei lui Euler propriu-zise, aceste erori sunt relativ mari şi, deşi ele pot fi micşorate prin alegerea unui pas mai mic, în general metoda lui Euler nu este considerată o metodă suficient de precisă.

- Metoda lui Euler este o metodă de tip *unistep*, adică x_{i+1} este calculat în funcţie doar de x_i, spre deosebire de metodele de tip *multistep*, în cadrul cărora x_{i+1} depinde nu doar de x_i ci şi de x_{i-1}, x_{i-2} ..., în acest mod obţinându-se o aproximare mai precisă.

Observaţii:

- O altă modalitate de a o obţine o aproximare mai bună este aceea de a păstra mai mulţi termeni în dezvoltarea în serie Taylor a lui $x(t_{i+1}) = x(t_i + h)$. Astfel, păstrând primii trei termeni obţinem (un polinom Taylor de gradul doi):

$$x(t_i + h) \simeq x(t_i) + \frac{x'(t_i)}{1!} \cdot h + \frac{x''(t_i)}{2!} \cdot h^2$$

Aici $x''(t_i) = \frac{d}{dt}(x'(t_i)) = \frac{d}{dt}(f(t_i, x(t_i))) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, x_i) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, x_i) \cdot \frac{dx}{dt} =$
$= \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, x_i) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, x_i) \cdot f(t_i, x_i)$.

Rezultă că dezvoltarea în serie Taylor a lui $x(t_i + h)$ este:

$$x(t_i + h) \simeq x_i + f(t_i, x_i) \cdot h + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, x_i) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, x_i) \cdot f(t_i, x_i)\right) h^2. \qquad (4)$$

Metode de tip Runge-Kutta - prezentare generală

Metodele de tip Runge-Kutta sunt o categorie de metode bazate pe formula:

$$x_{i+1} = x_i + \sum_{j=1}^{r} c_j \cdot k_j \tag{5}$$

unde:

$$k_1 = h \cdot f(t_i, x_i), \quad k_j = h \cdot f(t_i + \alpha_j \cdot h,\ x_i + \sum_{s=1}^{j-1} \beta_{js} \cdot k_s),\ j = 2, ..., r$$

Constantele c_j, α_j şi β_{js} sunt determinate impunând următoarea condiţie:

• **Coeficienţii puterilor lui h din dezvoltarea în serie Taylor a lui x_{i+1} dată de (5) trebuie să coincidă cu coeficienţii corespunzători din dezvoltarea în serie Taylor (4) a lui $x(t_i + h)$.**

Metoda descrisă de formulele (5) se numeşte **metodă Runge-Kutta de ordin r**.

Metode de tip Runge-Kutta - Cazul r=1

Pentru $r = 1$ formula (5) devine:

$$x_{i+1} = x_i + c_1 \cdot k_1, \quad k_1 = h \cdot f(t_i, x_i) \quad \Rightarrow \quad x_{i+1} = x_i + c_1 \cdot h \cdot f(t_i, x_i) \qquad (*)$$

Practic, în acest caz nu este nevoie de dezvoltare în serie Taylor pentru x_{i+1} (care apare deja ca şi un polinom de gradul întâi în h).

Pe de altă parte dezvoltarea corespunzătoare în serie Taylor a lui $x(t_i + h)$ este (polinom Taylor de gradul întâi):

$$x(t_i + h) \simeq x(t_i) + h \cdot x'(t_i) = x_i + h \cdot f(t_i, x_i) \qquad (**)$$

Comparând expresiile lui x_{i+1} $(*)$ şi $x(t_i + h)$ $(**)$ de mai sus observăm că în ambele expresii coeficientul lui h^0 ("termenul liber" în raport cu h) este x_i. Coeficientul lui h^1 în prima expresie este $c_1 \cdot f(t_i, x_i)$, în timp ce în cea de a doua este $f(t_i, x_i)$. Cum cei doi coeficienţi trebuie să fie egali, rezultă că $c_1 = 1$ şi de fapt **metoda Runge-Kutta de ordinul unu** coincide cu metoda lui Euler: $x(t_i + h) = x_i + h \cdot f(t_i, x_i)$.

Metode de tip Runge-Kutta - Cazul r=2

Pentru $r = 2$ formula (5) devin:

$$x_{i+1} = x_i + c_1 \cdot k_1 + c_2 \cdot k_2, \quad k_1 = h \cdot f(t_i, x_i), \; k_2 = h \cdot f(t_i + \alpha_2 \cdot h, x_i + \beta_{21} \cdot k_1).$$

Înlocuind k_1 şi k_2 obţinem:

$$x_{i+1} = x_i + c_1 \cdot h \cdot f(t_i, x_i) + c_2 \cdot h \cdot f(t_i + \alpha_2 \cdot h, x_i + \beta_{21} \cdot h \cdot f(t_i, x_i)). \tag{6}$$

Reamintim că o funcţie de tipul $f(a+h_1, b+h_2)$ poate fi dezvoltată în serie Taylor astfel:

$$f(a + h_1, b + h_2) \simeq f(a, b) + h_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(a, b) + h_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

Pentru $a = t_i$, $b = x_i$, $h_1 = \alpha_2 \cdot h$ şi $h_2 = \beta_{21} \cdot h \cdot f(t_i, x_i)$ obţinem dezvoltarea:

$$f(t_i + \alpha_2 \cdot h, x_i + \beta_{js} \cdot h \cdot f(t_i, x_i)) \simeq f(t_i, x_i) + \alpha_2 \cdot h \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, x_i) + \beta_{21} \cdot h \cdot f(t_i, x_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, x_i).$$

Înlocuind această dezvoltare în (6) obţinem:

$$x_{i+1} \simeq x_i + c_1 \cdot h \cdot f(t_i, x_i) + c_2 \cdot h \cdot \left(f(t_i, x_i) + \alpha_2 \cdot h \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, x_i) + \beta_{21} \cdot h \cdot f(t_i, x_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, x_i) \right)$$

Aşadar dezvoltarea în serie Taylor a lui x_{i+1} corespunzătoare formulei (5) este:

$$x_{i+1} \simeq x_i + (c_1 + c_2) \cdot f(t_i, x_i) \cdot h + \left(c_2 \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, x_i) + c_2 \cdot \beta_{21} \cdot f(t_i, x_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, x_i) \right) \cdot h^2 \tag{7}$$

Metode de tip Runge-Kutta - Cazul r=2 (continuare)

Pentru a găsi constantele c_1, c_2, α_2 şi β_{21} vom compara deci coeficienţii puterilor lui h din dezvoltarea în serie Taylor a lui x_{i+1} (7) corespunzătoare formulei Runge-Kutta:

$$x_{i+1} \simeq x_i + (c_1 + c_2) \cdot f(t_i, x_i) \cdot h + \left(c_2 \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, x_i) + c_2 \cdot \beta_{21} \cdot f(t_i, x_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, x_i) \right) \cdot h^2$$

şi din dezvoltarea în serie Taylor a lui $x(t_i + h)$ (4):

$$x(t_i + h) \simeq x_i + f(t_i, x_i) \cdot h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, x_i) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, x_i) \cdot f(t_i, x_i) \right) h^2.$$

- Coeficienţii lui h^0 sunt aceiaşi în ambele dezvoltări, şi anume x_i.
- Coeficientul lui h^1 în (7) este $(c_1 + c_2) \cdot f(t_i, x_i)$ pe când în (4) este $f(t_i, x_i)$, ceea ce înseamnă că $c_1 + c_2 = 1$.
- Coeficientul lui h^2 din (7) conţine $c_2 \cdot \alpha_2$ ca şi coeficient al lui $\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, x_i)$ şi conţine $c_2 \cdot \beta_{21}$ ca şi coeficient al lui $f(t_i, x_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, x_i)$, pe când în (4) coeficienţii corespunzători sunt ambii egali cu $\frac{1}{2}$, ceea ce înseamnă că $c_2 \cdot \alpha_2 = \frac{1}{2}$ şi $c_2 \cdot \beta_{21} = \frac{1}{2}$.

Metode de tip Runge-Kutta - Cazul r=2 (continuare)

Obţinem aşadar sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 \cdot \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ c_2 \cdot \beta_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sistemul are 4 necunoscute şi doar 3 ecuaţii, deci soluţia nu este unică. Aceasta înseamnă că nu există o unică metodă Runge-Kutta de ordin 2 (lucru dealtfel valabil pentru metodele Runge-Kutta de orice ordin $r,\ r > 1$).

O varianta uzuală a metodei Runge-Kutta de ordin 2 corespunde valorilor $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \beta_{21} = 1$:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, x_i) + f(t_i + h, x_i + h \cdot f(t_i, x_i))\right]. \tag{8}$$

Metode de tip Runge-Kutta - Cazul r=4

Una dintre cele mai des folosite metode numerice pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale, metodă care combină relativa simplitate cu acurateţea este metoda Runge-Kutta de ordin 4 prezentată în continuare.

Calculul coeficienţilor (puţin prea lung pentru a fi inclus aici) se face în aceeaşi manieră ca şi în cazurile anterioare (Exerciţiu!).

$$x_{i+1} = x_i + \frac{k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4}{6}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

unde

$$k_1 = h \cdot f(t_i, x_i),\ k_2 = h \cdot f(t_i + \frac{h}{2},\ x_i + \frac{k_1}{2}),\ k_3 = h \cdot f(t_i + \frac{h}{2},\ x_i + \frac{k_2}{2}),\ k_4 = h \cdot f(t_i + h,\ x_i + k_3).$$

Algoritm pentru metoda Runge-Kutta de ordin 4:

Date de intrare: Punctul de pornire (t_1, x_1) (dat de condiţia iniţială), intervalul de integrare $[a, b]$ (unde $a = t_1$), numărul n de subdiviziuni ale intervalului.

Date de ieşire: Valorile aproximative $x_i,\ i = 2, 3, \cdots, n+1$ ale funcţiei necunoscute x în punctele corespunzătoare t_i ale diviziunii.

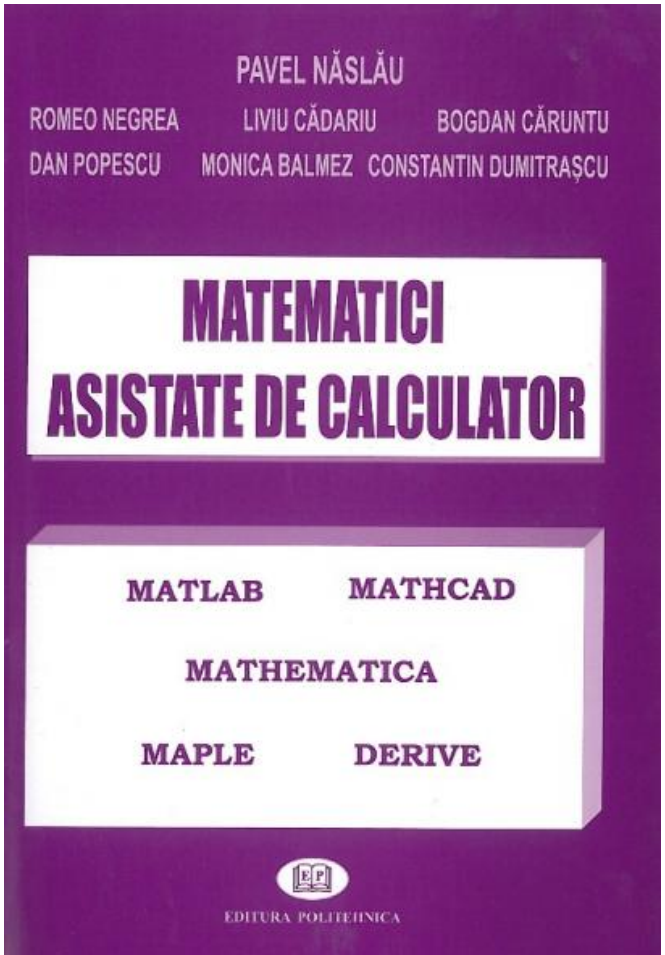
Start
$h = (b - a)/n;$
Pentru i de la 1 *la n*
$\quad t_{i+1} = t_i + h$
$\quad k_1 = h \cdot f(t_i, x_i)$
$\quad k_2 = h \cdot f(t_i + \frac{h}{2}$
$\quad k_3 = h \cdot f(t_i + \frac{h}{2},\ x_i + \frac{k_2}{2})$
$\quad k_4 = h \cdot f(t_i + h,\ x_i + k_3)$
$\quad x_{i+1} = x_i + \frac{k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4}{6}$
Stop

Exerciţiu

Găsiţi soluţia analitică (exactă), calculaţi o soluţie numerică folosind metoda lui Euler şi comparaţi cele două soluţii pentru problema Cauchy $\begin{cases} y' = 2 \cdot x \cdot y \\ y(0) = -1 \end{cases}$

Bibliografie

Matematici asistate de calculator. Matlab, Mathcad, Mathematica, Maple, Derive
Pavel Naslau, Romeo Negrea, Liviu Cadariu, Bogdan Caruntu, Dan Popescu, Monica Balmez, Constantin Dumitrascu, Editura Politehnica, Timisoara, 2007.



Chestionar Evaluare Curs - CV

Saptamana 7

Curs 7 184.2KB PDF document

Luni 04.04.2022 ora 16.00 Amfiteatrul A101

Chestionar Evaluare Curs

In vederea imbunatatirii calitatii actului didactic, va rog sa completati acest chestionar (anonim).

Examen Parţial - CV

Consultatii Partial - Zoom meeting - Vineri 08.04.2022 - 15.00

Sesiune speciala Zoom: raspunsuri la eventuale intrebari.

Saptamana 8

Exercitii de antrenament - Examen Partial 88.4KB PDF document

Inscriere Examen Partial

Inscrieti-va aici daca doriti sa participati la Examenul Partial.

Termen: Joi 07.04.2022

Examen Partial MAC - Luni 11.04.2022 16.00 A101 69.3KB PDF document

Gasiti instructiuni si model de subiect aici.

Examen Parţial - Instrucţiuni

- Vineri 08.04.2022, 15.00 - Sesiune Zoom consultaţii (răspunsuri la întrebări)
- Luni 11.04.2022, 16.00-16.45, sala A101 - Examen Parţial MAC ET
- Luni 11.04.2022, 17.00-17.45, sala A101 - Examen Parţial MAC ISEE
- Examenul este scris, vă rog sa aduceti coli de hârtie (4-5) şi instrumente de scris (pix, stilou).
- În timpul examenului este interzisă folosirea telefonului.
- Puteţi avea o foaie A4 **scrisă de mână** cu formule/teorie/exemple.

Examen Parţial - Model de subiect

Exerciţiul 1 (1 punct): Se poate calcula un polinom de interpolare Lagrange corespunzător unei diviziuni Δ care conţine trei sau mai multe noduri? Justificaţi răspunsul.

Exerciţiul 2 (4 puncte): Pornind cu $x_1 = 3$, calculaţi pe intervalul $[1, 3]$ soluţii aproximative pentru ecuaţia $x^2 + 2x - 8 = 0$ folosind doi paşi ai metodei lui Newton. Evaluaţi la fiecare pas eroarea aproximaţiei.

Exerciţiul 3 (4 puncte): Rezolvaţi problema Cauchy: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + t^2 \cdot e^t \\ x(0) = -1 \end{cases}$

Note: 1 punct din oficiu; timp de lucru 45 de minute.

Examen Parţial - Tipuri de exerciţii

Ex.1: Calculaţi polinomul de interpolare Lagrange corespunzător diviziunii Δ : -2 $<$ -1 $<$ 0 şi vectorului de interpolare Y = {-6,-2,-2}

Ex.2: Calculaţi polinomul de aproximare în sensul celor mai mici pătrate corespunzător diviziunii Δ : -2 $<$ -1 $<$ 0 şi vectorului de interpolare Y = {-2,-2,-2}

Ex.3: Calculaţi o valoare aproximativă pentru $\cos(0.2)$ folosind un polinom de interpolare de gradul 1 asociat funcţiei $\cos(x)$ (se poate folosi în calcul aproximarea $\pi \simeq 3.14$). Evaluaţi eroarea aproximării.

Ex.4: Calculaţi valoarea exactă a integralei $I = \int_1^2 (x^5 + 3x^2 + x^2)\, dx$ şi gšsiţi valori aproximative folosind metoda trapezului şi metoda lui Simpson.

Ex.5: Pornind cu $x_1 = -5$, calculaţi pe intervalul $[-5, -3]$ soluţii aproximative pentru ecuaţia $x^2 + 3x - 4 = 0$ folosind doi paşi ai metodei lui Newton. Evaluaţi la fiecare pas eroarea aproximaţiei.

Examen Parţial - Tipuri de exerciţii (continuare)

Ex.6: Rezolvaţi problema Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2 \cdot t^3 \cdot x^3 \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

Ex.7: Rezolvaţi problema Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = t^2 \cdot x + 3 \cdot t^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Ex.8: Rezolvaţi problema Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2 \cdot t \cdot x + 3 \cdot t \cdot x^2 \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

Ex.9: Rezolvaţi ecuaţia diferenţială:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x \cdot t^2 + 2 \cdot x^2 \cdot t}{t^3}$$

Examen Parţial - Tipuri de exerciţii (continuare)

Ex.10: Rezolvaţi problema Cauchy:

$$\begin{cases} 5 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 8 \cdot \frac{dx}{dt} + 5 \cdot x = 0 \\ x(0) = 1, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 2 \end{cases}$$

Ex.11: Rezolvaţi problema Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + 9 \cdot \frac{dx}{dt} + 9 \cdot x = 0 \\ x(0) = 10, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2}(0) = 0 \end{cases}$$

Ex.12: Rezolvaţi problema Cauchy:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 2 \cdot x - y \\ x(0) = 1, \ y(0) = 2 \end{cases}$$

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Vă mulţumesc pentru atenţie!